

Eficiência do gráfico de controle EWMA em função de diferentes quantidades e posições de causas especiais

João Marcos Ramos de Moraes (UFV) jaum_55@hotmail.com

José Ivo Ribeiro Júnior (UFV) jivo@ufv.br

Thiago da Costa Gonçalves (UFV) tcostagoncalves@gmail.com

No presente trabalho, foi mensurada a eficiência do gráfico de controle EWMA (Média Móvel Ponderada Exponencialmente) com $\lambda=0,8$. Com o auxílio do software Minitab, analisaram-se as restrições relevantes como posição dos dados fora de controle (meio ou fim da amostra), porcentagem de dados fora de controle e o valor de delta (três desvios-padrão). De acordo com os resultados, conclui-se que o alarme falso é menor quando os pontos fora de controle estão situados ao final da amostra e aumenta em função do aumento de percentual de pontos. Já o alarme verdadeiro não sofre efeito dos dois fatores anteriores, mas aumenta em função do aumento do deslocamento que se quer detectar como diferença especial.

Palavras-chave: Gráfico de controle; EWMA; Alarme.

1. Introdução

O gráfico de controle EWMA é uma boa alternativa de monitoramento da média, quando o interesse é em detectar pequenas mudanças no processo (MONTGOMERY, 2004). Ele é baseado em observações individuais ($n=1$) ou em amostras que contem mais de uma unidade ($n>1$) de tamanhos constantes ou variáveis. No gráfico EWMA, a decisão sobre o processo é baseada na informação de cada amostra com um percentual de peso das anteriores.

Para a construção do gráfico de controle EWMA, devem-se escolher os valores de m (tamanho da amostra), n (numero de itens por amostra), k (numero de desvios-padrão) e λ (peso da amostra) dentro do intervalo de $0 < \lambda \leq 1$. Os valores da estatística W_i plotados no gráfico EWMA da medida individual são calculados através da seguinte expressão:

$$W_i = \lambda y_i + (1 - \lambda)W_{i-1} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.1)$$

Caso μ_Y seja conhecido, tem-se: $W_0 = \mu_Y$. Caso contrário, se ele for desconhecido e substituído pelo seu estimador, então se tem: $W_0 = \bar{Y}$. Para as determinações da Linha Média e dos Limites inferior e superior, são utilizadas as expressões:

$$LSC_i = \mu_Y + k\sigma_Y \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \quad (2.2)$$

$$LM = \mu_Y \quad (2.3)$$

$$LIC_i = \mu_Y - k\sigma_Y \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \quad (2.4)$$

Como a estatística W_i plotada no gráfico de controle EWMA é dependente dos valores medidos nas amostras anteriores, o objetivo principal do trabalho foi de verificar a rapidez desse gráfico em acompanhar os pontos sob ou fora de controle produzidos pelo processo, medida pelas estimativas dos alarmes falso e verdadeiro.

2. Revisão de literatura

Sobre qualidade, **Montgomery** (2004) prefere defini-la como sendo inversamente proporcional à variabilidade. Note que essa definição implica que se a variabilidade de uma característica importante de um produto ou serviço decresce, a qualidade aumenta. No entanto, outros autores já apresentaram definições diferentes.

De acordo com citações de Costa et al. (2004), para **Juran**, qualidade significa adequação ao uso. Para **Deming** (2000), qualidade significa atender e, se possível, exceder às expectativas do consumidor. Para **Crosby** (1995), qualidade significa atender às especificações. Para **Taguchi** (1999), a produção, o uso e o descarte de um produto sempre acarretam prejuízos (“perdas”) para a sociedade e, portanto, quanto menor for a perda melhor será a qualidade do produto.

Em função da presença da variabilidade, os métodos estatísticos desempenham papel importante nos esforços para a melhoria da qualidade. Em 1924, Walter A. Shewhart dos Bell Telephone Laboratories desenvolveu o conceito estatístico do gráfico de controle, que é considerado como o começo formal do Controle Estatístico de Qualidade (CEQ) (MONTGOMERY, 2004).

Os gráficos de controle são comparações do desempenho do processo com determinados limites de controle, verificando se os pontos do gráfico distribuem-se segundo padrões aleatórios. Caso isso aconteça, o processo sob análise está sob controle estatístico, ou seja, somente causas aleatórias (comuns) da variação atuam no processo (MONTGOMERY, 2004). Quando apenas essas causas estão atuando, a média μ_Y e o desvio padrão σ_Y se mantêm constantes e o processo estará sob controle estatístico (estável) e com comportamento previsível por meio de probabilidades.

Se houver pontos além dos limites ou se padrões não aleatórios forem identificados, a variabilidade do processo pode não estar se comportando mais de forma aleatória e sim devido a causas especiais, que fazem com que o processo se comporte de modo não previsível ou fora de controle estatístico de qualidade, por meio de alterações significativas na média e/ou no desvio-padrão. Uma investigação imediata deve ser realizada, para verificar se tal alarme deve-se realmente às causas especiais de variação. Em caso positivo, algo precisa ser feito para retornar o processo à condição desejada (JURAN, 1999).

A plotagem dos dados das características da qualidade deve ser feita de forma cronológica ou em função do número da amostra, para que seja possível identificar quais são as causas especiais de variação. O conceito de processo sob ou fora de controle estatístico é tão importante quanto o de variabilidade, e torna-se extremamente importante ressaltar que os critérios para a identificação dos problemas compreendem a existência de padrões não aleatórios, os quais incluem entre outros, a existência de pontos fora dos limites de controle.

O gráfico de controle (Figura 1) demonstra o comportamento de uma característica de qualidade e suas flutuações em torno de um valor médio e permite distinguir entre os dois tipos de causas de variação. Basicamente, ele é uma representação de um determinado estimador, que consiste da LM e dos limites inferior e superior de controle, em função das

diversas estratificações temporais ou espaciais possíveis de serem estabelecidas (MONTGOMERY e RUNGER, 2003).

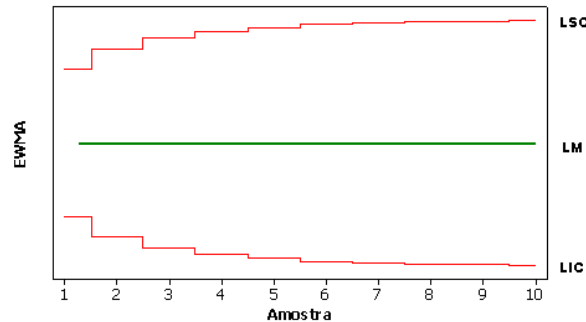


Figura 1 - Estrutura do Gráfico de Controle EWMA

Os gráficos de controle por variáveis podem ser utilizados para características de qualidade que podem ser medidas ou que sofrem uma variação contínua, pois o controle do processo exige o monitoramento da média e da variabilidade. Algumas das metodologias indicadas para a construção desses gráficos de controle são as de Shewhart, EWMA (médias móveis exponencialmente ponderadas) e CUSUM (somas cumulativas).

Independente do tipo de gráfico de controle, algumas pressuposições precisam ser satisfeitas pelos dados para permitir a sua utilização e, portanto, para que os seus resultados sejam válidos. De acordo com Alwan e Roberts (1995), as observações das variáveis normais, devem ser independentes e identicamente distribuídas. Desse modo, as regras para identificação de padrões não aleatórios pressupõem que essas pressuposições sejam satisfeitas. Caso isso não se verifique, o valor dos gráficos de controle será no mínimo questionável.

Considere um gráfico de controle, supondo que causas aleatórias não alteram a média de Y, sendo H_0 e H_1 hipóteses mutuamente exclusivas dadas por:

$$H_0 : \mu_Y = \mu_0 \quad (\text{processo sob controle});$$

$$H_1 : \mu_Y = \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0 \quad (\text{processo fora de controle})$$

onde μ_0 é a média de controle;

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0} = \text{deslocamento que se quer detectar como variação especial em numero}$$

de desvios-padrão;

$$\sigma_0 = \text{desvio-padrão da população.}$$

Se a hipótese H_0 for verdadeira e rejeitada, comete-se o **erro tipo I** ou **erro α** (alarme falso). Por outro lado se H_0 for falsa e aceita, comete-se o **erro tipo II** ou **erro β** (COSTA et al., 2004). No CEQ, o alarme falso (α) representa a probabilidade de erroneamente considerar-se o processo fora de controle quando ele está sob controle (H_0 verdadeira). A consequência prática é de intervir no processo quando ele está isento de causas especiais. Já a falta de detecção (β) representa a probabilidade de erroneamente considerar-se o processo sob controle, quando ele está fora de controle (H_1 verdadeira). A consequência prática é de não intervir no processo quando ele está sob influência de causas especiais, sendo o alarme verdadeiro ou poder ($Pd = 1 - \beta$) é definido como a probabilidade de detecção, ou seja, de rejeitar H_0 falsa (COSTA et al., 2004).

Estatisticamente, pode-se verificar a eficiência de um determinado gráfico de controle, com base nas estimativas dos erros devidos ao alarme falso (α) e à falta de detecção (β). Quando a hipótese H_1 é verdadeira (processo fora de controle), o ideal seria que o primeiro ponto plotado já caísse fora dos limites de controle. Contudo isso nem sempre ocorre, principalmente se o deslocamento sofrido pela média for pequeno.

A medida de eficiência mais usual dos gráficos de controle é o número médio de amostras até o sinal (NMA), que segue uma distribuição geométrica de parâmetro p , independentemente de se tratar de alarme falso ou verdadeiro. Se a hipótese H_0 for verdadeira ($\delta = 0$), então $p = \alpha$. Se a hipótese H_1 for verdadeira ($\delta > 0$), então $p = Pd$.

Como a média da distribuição geométrica de parâmetro p é igual a $1/p$, têm-se:

$$NMA_{\delta=0} = \frac{1}{\alpha} \quad (3.1)$$

$$NMA_{\delta>0} = \frac{1}{Pd} \quad (3.2)$$

Assim, um gráfico de controle bem planejado é aquele que apresenta, em termos teóricos, um baixo alarme falso, um alto poder, um alto $NMA_{\delta=0}$ e um baixo $NMA_{\delta>0}$, em função do valor de δ pré-estabelecido. Na implantação dos gráfico de controle são controladas grandes variações devidas às causas especiais e, com o passar do tempo, busca-se detectar efeitos cada vez menores dessas possíveis causas.

Portanto, a primeira escolha é de um gráfico de controle com baixa incidência de alarme falso, que trará confiabilidade no monitoramento do processo, já que os pontos fora de controle não serão, na grande maioria das vezes, devidos às causas aleatórias. Caso haja a necessidade de aumentar a qualidade do processo e, conseqüentemente, de diminuir a sua variabilidade, será importante aumentar a sensibilidade do gráfico pelo aumento do seu poder em detectar novas causas especiais que eram detectadas anteriormente como causas aleatórias. No entanto, o aumento do Pd não poderá acontecer em função do aumento do α , mas mantendo-o em níveis baixos e aceitáveis.

3. Metodologia

Os dados da variável aleatória normal Y foram simulados no software Minitab para 500 amostras com observações individuais e com parâmetros de média ($\mu_Y=1000$) e desvio-padrão ($\sigma_Y=100$). Foram feitos diferentes arranjos no conjunto de dados com objetivo de ter, além dos pontos sob controle estatístico com média $\mu_Y=1000$, pontos fora de controle com média $\mu_Y + \delta\sigma_Y$, para valores de δ iguais a 1, 2 e 3, inseridos ao meio (0) ou ao final (1) do conjunto de dados, com diferentes porcentagens: 5% (25 amostras fora de controle), 20% (100 amostras), 35% (175 amostras) e 50% (250 amostras). No total foram simulados 24 conjuntos de dados.

Em seguida esses conjuntos de dados utilizados para a construção dos gráfico de controle EWMA no software, com $m=500$, $n=1$ e $\lambda=0,8$. Após cada construção, foram anotados as quantidades de pontos sob e fora de controle, a fim de obter as estimativas dos alarmes falso (α) e verdadeiro (Pd) dados por:

$$\hat{\alpha} = \frac{NPFC(\delta = 0)}{500};$$

$$\hat{P}_d = \frac{NPFC(\delta > 0)}{500};$$

onde NPFC é o número de pontos fora de controle.

Por fim, foram realizadas análises de regressão no Software Minitab das estimativas α e P_d , em função dos valores de δ , das porcentagens e das posições dos pontos fora de controle, cujos coeficientes foram testados pelo teste t a 5% de probabilidade.

4. Resultados e Discussão

A seguir são apresentados como ilustração, alguns gráficos com 5 e 35% de dados fora de controle no meio (Figuras 2a e 2b) e no final da amostra (Figuras 3a e 3b), para diferentes valores de δ , porém com 20 e 50% de dados fora de controle.

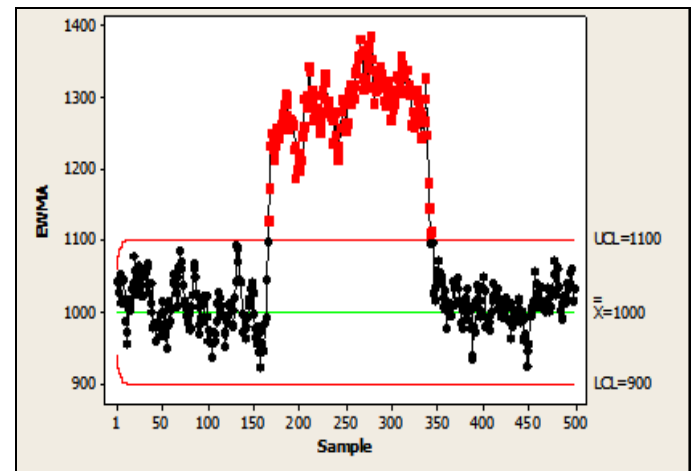
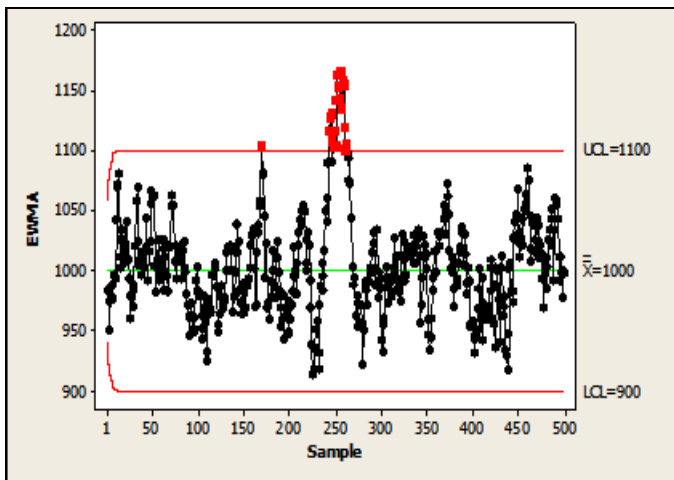


Figura 2a : EWMA com 5% de dados fora de controle e $\delta = 1$.

Figura 2b: EWMA com 35% dos dados fora de controle e $\delta = 3$.

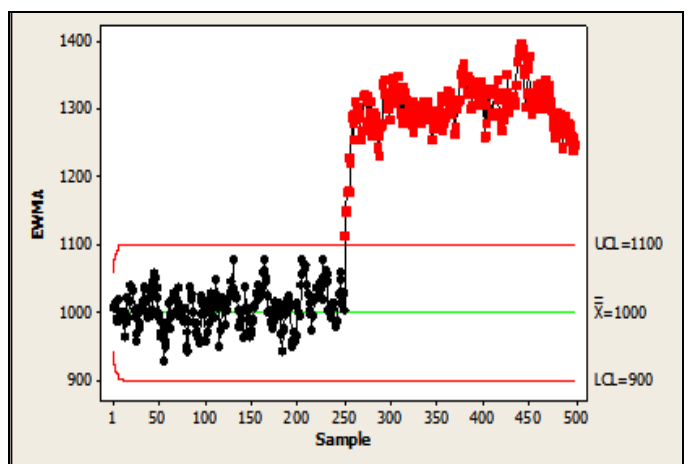
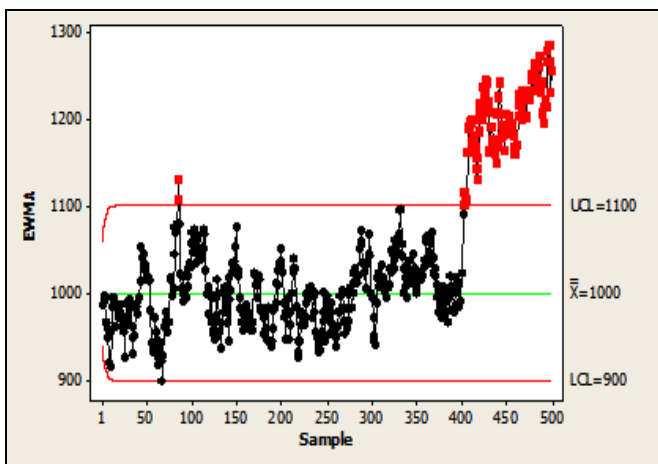


Figura 3a: EWMA com 20% de dados fora de controle e $\delta = 2$.

Figura 3b: EWMA com 50% dos dados e fora de controle e $\delta = 3$.

A partir dos 24 gráficos de controle EWMA construídos foram obtidas as estimativas dos alarmes falsos e verdadeiros, conforme apresentado na Tabela 1, sendo estimadas as seguintes equações de regressão:

$$\hat{P}d = 0,40846 + 0,21048 * \delta ;$$

$$\hat{\alpha} = 0,005583 - 0,008896 * pos + 0,00019527 * por , \text{ em que:}$$

*significativo pelo teste t (P<0,005);

δ = delta; pos = posição; por = porcentagem ; pos = 0 (meio) ; pos = 1 (final).

TABELA 1. Estimativas dos alarmes falso (α) e verdadeiro (Pd) no gráfico de controle EWMA com $\lambda=0,8$ em função de delta, da posição e da porcentagem de pontos fora de controle.

Posição	Delta	Porcentagem	$\hat{P}d$	$\hat{\alpha}$
0	1	5	0,76	0,002
0	1	20	0,43	0,0025
0	1	35	0,58	0,003
0	1	50	0,44	0,012
0	2	5	0,88	0,0042
0	2	20	1	0,01
0	2	35	0,97	0,0092
0	2	50	0,98	0,032
0	3	5	0,96	0,0084
0	3	20	0,97	0,0125
0	3	35	0,98	0,015
0	3	50	1	0,02
1	1	5	0,76	0,0021
1	1	20	0,43	0
1	1	35	0,58	0,003
1	1	50	0,42	0,004
1	2	5	0,88	0
1	2	20	0,99	0,005
1	2	35	0,97	0
1	2	50	0,98	0,008
1	3	5	0,92	0
1	3	20	0,96	0,0025
1	3	35	0,98	0
1	3	50	1	0

Como pode-se observar o alarme verdadeiro (Pd) aumenta (P>0,05) em função do aumento do delta, cujas estimativas estão entre 0,62, 0,83 e 1, para delta igual a um, dois e três, respectivamente. O maior Pd para $\delta=3$ é naturalmente entendido, dado que neste caso, os pontos fora de controle estão mais distantes da média de controle e, portanto, mais fáceis de serem discriminados. Para o gráfico de controle EWMA com $\lambda=0,8$, recomenda-se monitorar processos, cujo controle seja a partir de dois desvios-padrão, dado que para $\delta<2$, o Pd se torna baixo e, conseqüentemente, muitos dos pontos fora de controle serão considerados como sob controle.

Já o alarme falso (α) aumente (P<0,005) em função da posição central e do aumento da porcentagem de pontos fora de controle, sendo:

$\hat{\alpha} = 0,005583 + 0,00019527 * \text{por}$, para pontos fora de controle no meio da amostra;

$\hat{\alpha} = -0,003313 + 0,00019527 * \text{por}$, para pontos fora de controle no final da amostra.

Apesar dessa diferença e do α aumentar em função da quantidade de pontos fora de controle, o gráfico EWMA, mostrou-se bastante eficiente em monitorar processos com as condições impostas na simulação dos dados, dadas as máximas estimativas de $\hat{\alpha} = 0,0153$ (meio) e $\hat{\alpha} = 0,0065$ (final) para $\text{por} = 50\%$ estarem bem abaixo de 0,05, valor bastante utilizado como nível de significância.

5. Conclusão

No gráfico de controle EWMA com $\lambda = 0,8$, o poder é influenciado apenas pelo delta e pelo alfa sofre influência da posição e da porcentagem de pontos fora de controle. Dadas as estimativas de $\hat{P}d = 0,83$ para $\delta = 2$ e $\hat{\alpha} = 0,0153$, recomenda-se utilizar esse gráfico para sinalizar alterações iguais ou superiores a dois desvios-padrão da média de controle com até 50% dos pontos fora de controle, independentemente das suas posições (meio ou final).

Na figura 4 é apresentado o gráfico que se refere à regressão de Pd em função de delta.

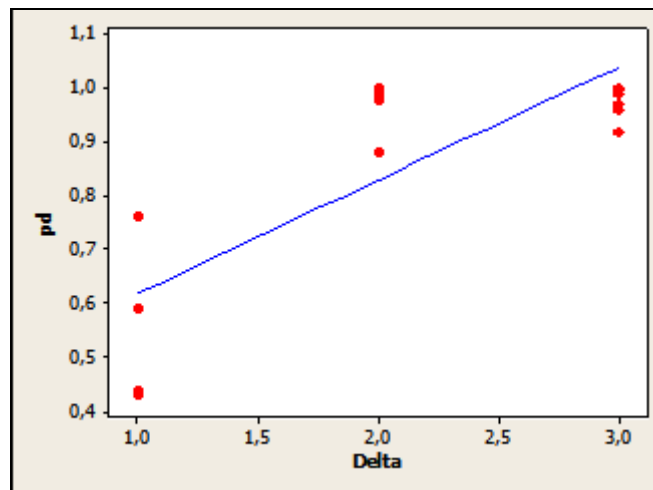


Figura 4. Estimativas de Pd em função de delta.

Referências

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. Controle Estatístico de Qualidade. São Paulo Atlas, 2004. 334 p.

JURAN, J. M. Juran's quality handbook. 5. ed. New York: McGraw-Hill, 1999.

MONTGOMERY, D. C. Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade. 4a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros. Rio de Janeiro: LTC, 2003.