

A aplicação de Programação por Metas para a geração de horários de exames para o Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Viçosa - COLUNI

André Lobo Teixeira (UFV) andre.lobo@ufv.br

Lana Mara Rodrigues dos Santos (UFV) lanamara@ufv.br

Guilherme Rodrigues Batista (UFV) guilherme.batista@ufv.br

Resumo: Em diversas instituições de ensino ocorrem momentos avaliativos que são de grande importância e por isso é imprescindível o planejamento dos mesmos. Definir os dias das provas e os locais em que serão realizadas são exemplos de decisões a serem tomadas neste tipo de situação. A execução manual destas ações pode ser trabalhosa, portanto modelos matemáticos resolvidos computacionalmente podem auxiliar nas tomadas de decisões e diminuir este esforço. Neste trabalho é proposto um modelo matemático de Programação Linear Inteira e Programação Linear por Metas para gerar uma grade de horários de exames para o Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Viçosa – COLUNI, buscando-se melhorar a execução deste processo na instituição.

Palavras-chave: Programação Linear Inteira, COLUNI, Programação de Horários de Exames, Programação por Metas.

1. Introdução

O processo de avaliação consiste em um importante momento do ano letivo de diversas instituições de ensino no Brasil. Em muitas delas, a definição do horário e dia da avaliação fica a cargo do professor da disciplina ou do departamento em que o mesmo pertence, sendo este último caso comum em universidades. Em algumas instituições, as avaliações de todas as disciplinas são feitas em um mesmo período, muito conhecido como semana de provas. Diante dessa situação e devido à sua importância, há a necessidade de um bom planejamento da localização no espaço e tempo destes eventos, porque tudo deve ser feito de uma forma que não comprometa a didática.

Neste trabalho o problema abordado é a elaboração de uma grade de avaliação anual do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Viçosa (COLUNI), o qual atende ao ensino médio. O Problema de Programação de Horários Exames (PPHE) é um problema combinatorial de difícil resolução e que faz parte da classe de Problemas de Programação de Horários (PPH). Considerando que os exames serão realizados por determinados grupos de alunos, o PPHE geral consiste em alocar um conjunto de exames a períodos e salas procurando-se evitar conflitos para os alunos (SANTOS E SOUZA, 2007, p.15).

Especificamente, no problema de programação de horários de exames do COLUNI é necessário alocar avaliações de disciplinas aos dias de um período avaliativo de aproximadamente uma semana. Este processo avaliativo se repete oito vezes durante o ano. É desnecessária a consideração de salas porque no colégio elas existem em quantidade e capacidade suficiente.

Para a formulação de um problema de programação de horários, o que também inclui os problemas de programação de horários de exames, é amplamente utilizada a Programação Linear Inteira (PLI). Ao se utilizar a PLI, procura-se distribuir recursos limitados da melhor forma possível. A limitação dos recursos é expressa matematicamente por equações e/ou inequações que são chamadas de restrições do modelo. A melhor forma de distribuir estes recursos é chamada de solução ótima, que no caso é a melhor dentre todas as soluções possíveis, ou seja, soluções que atendem às restrições. A solução ótima é encontrada maximizando ou minimizando uma função, denominada função objetivo (ANDRADE, SCARPIN E STEINER, 2012, p.4).

As restrições mais comuns na formulação de um PPHE são para impedir que um mesmo aluno seja designado para fazer mais de um exame ao mesmo tempo, que tratam da disponibilidade de salas que comportem adequadamente o número de alunos e sobre a disponibilidade de supervisores de exames. Ainda assim, alguns conjuntos de restrições para esse tipo de problema são bastante dependentes da instituição de ensino e do sistema educacional adotado pela mesma (CARTER, LAPORTE e LEE, 1996).

No problema em questão, para a elaboração da grade horária a coordenação da escola define objetivos que ao serem impostos como restrições no modelo proposto neste trabalho impossibilitaram de ser gerada uma grade de horários porque o problema não teve solução. Neste momento se justificou a aplicação da metodologia de Programação por Metas que será abordada na seção seguinte.

Em resumo, no presente trabalho será utilizada Programação Linear Inteira e a metodologia de Programação Linear por Metas, em específico o método dos pesos, para desenvolver o modelo matemático para elaboração de uma grade de avaliação anual para COLUNI. Para a resolução do modelo desenvolvido, utilizou-se o *software IBM ILOG CPLEX Optimization Studio*, comumente referenciado como *CPLEX*. O *CPLEX* é um pacote de softwares para otimização que contém, entre outros, o *CPLEX Optimizer* que é utilizado para solucionar modelos de Programação Matemática.

Na seção 2 é abordada a Programação Linear por Metas. Na seção seguinte é feita a descrição do problema. Na seção 4 o modelo de PLI é apresentado e é aplicada a Programação Linear por Metas. Os resultados computacionais se encontram na seção 5 e as conclusões retiradas após a resolução do modelo na seção 6. Os agradecimentos são feitos na seção 7 e na seção 8 estão as referências bibliográficas citadas.

2. Programação Linear por Metas

A Programação por Metas surgiu por volta de 1952, sendo que o termo *goal programming*, comumente utilizado, foi cunhado 10 anos mais tarde em publicações de Charnes e Cooper (CHARNES E COOPER, 1977, p.39).

A Programação Linear por Metas pode ser considerada uma generalização do conceito de Programação Linear que visa contornar as limitações dos modelos deste tipo, sendo que estes possuem restrições que podem deixá-los sem solução ou com difícil resolução. Contudo, na prática tais imposições podem não ser tão restritivas, sendo plausível haver tolerâncias para essas restrições. Sendo assim, são criadas variáveis para representar os desvios positivos e negativos da meta a ser atingida na restrição (GOMES, 2004).

Então, busca-se minimizar estes desvios das metas que pode ser feito incluindo estas variáveis na função objetivo utilizando um dos importantes métodos: o método dos pesos. Para a resolução do problema do COLUNI foi utilizado o método dos pesos, o qual consiste

em formar uma única função objetivo composta da soma ponderada dos objetivos (ARENALES et al, 2007).

Surge a necessidade de serem definidas as prioridades de cada meta a ser atingida. Neste momento é evidente a importância do decisor na Programação Linear por Metas, sendo ele responsável por definir tais prioridades. A Programação Linear por Metas é amplamente utilizada para resolver problemas de decisão que envolvem diversos objetivos (URÍA et al, 2002).

Na seção seguinte o problema de programação de horários de exames do COLUNI será descrito com mais detalhes, sendo expostas suas especificidades e quais as metas determinadas pela coordenação do colégio.

3. Descrição do Problema de Programação de Horários de Exames do COLUNI

Localizado no campos da UFV, o Colégio de Aplicação - Coluni dispõe de modernas instalações além de salas de projeções e laboratórios equipados de física, química, biologia e humanidades. Conta com professores que trabalham em regime de dedicação exclusiva, o que permite um melhor atendimento para o aluno. Durante sua história, o COLUNI se tornou uma escola de referência de um ensino de qualidade e segue sendo o melhor colégio público de Minas Gerais, sendo também considerado modelo para muitas instituições de ensino.

Anualmente é elaborada a grade de avaliações do COLUNI. São 8 períodos de avaliações durante o ano e em cada um deles as provas das 11 disciplinas existentes acontecem aproximadamente durante uma semana. Geralmente, o número de dias por período disponíveis para a aplicação das provas é menor do que 11, o que implica na alocação de mais de uma avaliação por dia. Existem doze turmas, sendo quatro turmas para cada um dos três anos do Ensino Médio. Todas as turmas prestam os exames ao mesmo tempo e das mesmas disciplinas, podendo acontecer no máximo duas provas por dia.

Considerando estas características, é necessário distribuir as provas nos dias de cada período de forma que aconteçam as avaliações de todas as disciplinas somente uma vez por período, no máximo aconteçam duas provas por dia e buscando-se atingir os seguintes objetivos:

1. As disciplinas são divididas em 4 grupos diferentes. Para um mesmo dia, deseja-se que disciplinas pertencentes a um mesmo grupo não sejam alocadas. Os grupos são:
 - 1.1 Matemática e Física
 - 1.2 Biologia e Química
 - 1.3 História, Geografia, Filosofia e Sociologia
 - 1.4 Português, Inglês e Espanhol
2. Se uma disciplina foi alocada para o penúltimo ou último dia da semana, tenta-se evitar a alocação da mesma respectivamente para esses dias nos outros períodos.

Estes são objetivos definidos pela coordenação do COLUNI, os quais visam contribuir com a didática, favorecendo alunos e professores. O objetivo 1 é evitar alocação conjunta de determinados pares indesejados para um mesmo dia. O objetivo 2 se justifica porque os resultados das provas devem ser divulgados até uma data limite e o professor da disciplina alocada para os últimos dias de um período têm menos tempo para corrigi-la do que um

alocado para os primeiros dias. Procura-se, então, fazer um rodízio das disciplinas alocadas para os últimos dias dos períodos.

A elaboração manual da grade de horários de exames feita pela coordenação do colégio muitas vezes é um processo que demanda muito esforço. Portanto, um modelo matemático resolvido computacionalmente tem capacidade de diminuir este trabalho.

4. Formulação Matemática

Nesta seção será apresentado um modelo de Programação Linear Inteira para o Problema de Programação de Horários de Exames do COLUNI e a seguir, devido à ocorrência de infactibilidade ao se tentar resolver o problema, a reformulação do modelo utilizando a metodologia de Programação por Metas.

4.1 Modelo de Programação Linear Inteira para o Problema de Programação de Horários de Exames do COLUNI

O Problema de Programação de Horários de Exames do COLUNI consiste em distribuir as provas das disciplinas i nos dias d de cada período t . A variável binária x_{ijdt} é definida para representar se haverá prova das disciplinas i e j , com $i, j \in I$, no dia d do período t , sendo I o conjunto de todas as disciplinas.

$$x_{ijdt} = \begin{cases} 1, & \text{se há provadas disciplinas } i \text{ e } j \text{ no dia } d \text{ do período } t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As disciplinas e seus respectivos índices i são definidos de acordo com a Tabela 1.

Tabela 1 - Disciplinas e seus respectivos índices.

i	Disciplina
1	Filosofia
2	Sociologia
3	Inglês
4	Espanhol
5	Biologia
6	Português
7	História
8	Geografia
9	Química
10	Matemática
11	Física

Sabendo que as variáveis x_{ijdt} e x_{jidt} representam o mesmo par de disciplinas, as variáveis de decisão que serão consideradas são as tais que $i \leq j$. Para o caso $i = j$, a variável

$x_{i|dt}$ representa se haverá somente a prova da disciplina i no dia d do período t .

No problema em questão, deseja-se evitar que exames de disciplinas de um mesmo grupo sejam alocadas para um mesmo dia de um determinado período. Desta maneira, devem ser considerados subconjuntos I_k , com $k \in \{1,2,3,4\}$, do conjunto I que são:

$$I_1 = \{10,11\} \quad I_2 = \{5,9\} \quad I_3 = \{1,2,7,8\} \quad I_4 = \{3,4,6\}$$

Portanto, é possível definir o modelo de PLI sendo considerados os devidos parâmetros:

D_t	Conjunto dos dias d do período t disponíveis para a aplicação de prova;
$ D_t $	Número de elementos do conjunto D_t ;
I	Conjunto de disciplinas;
$ I $	Número de elementos do conjunto I ;
$ T $	Número de períodos t .

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \leq j}}^{|I|} \sum_{i=1}^{|I|} x_{ijdt} \leq 1 \quad \forall t \in \{1, \dots, |T|\}, d \in D_t \quad (1)$$

$$\sum_{d \in D_t} \left(\sum_{j=1}^i x_{j|dt} + \sum_{j=i+1}^{|I|} x_{ijdt} \right) = 1 \quad \forall t \in \{1, \dots, |T|\}, \forall i \in I \quad (2)$$

$$\sum_{t=1}^{|T|} x_{ij(|D_t|-1)t} \leq 1 \quad \forall i, j \in I \quad (3)$$

$$\sum x_{ij|D_t|t} \leq 1 \quad \forall i, j \in I \quad (4)$$

$$F = 0 \quad (5)$$

$$x_{ijdt} \in \{0,1\} \quad (6)$$

A restrição (1) impede que mais de duas avaliações sejam alocadas para um mesmo dia d de um mesmo período t . A restrição (2) garante que a avaliação da disciplina i prevista para um período t aconteça uma e somente uma vez em algum dos dias d do período em questão. A restrição (3) assegura que se uma avaliação de uma disciplina i for alocada para o penúltimo dia de um dos $|T|$ períodos, ela não será alocada para o penúltimo dia de nenhum dos outros períodos. A restrição (4) faz o mesmo que a (3), no entanto para os últimos dias dos períodos. A restrição (5) faz com que nenhum par de disciplinas de mesmo grupo seja alocado a qualquer dia d , ou seja, serão iguais a zero as variáveis x_{ijdt} que tenham i e j pertencendo simultaneamente a algum dos subconjuntos I_k anteriormente definidos. F é definida a seguir:

$$F = \sum_{d \in D_t} \sum_{t=1}^{|T|} \left(\sum_{\substack{j \in I_1 \\ i < j}} \sum_{i \in I_1} x_{ijdt} + \sum_{\substack{j \in I_2 \\ i < j}} \sum_{i \in I_2} x_{ijdt} + \sum_{\substack{j \in I_3 \\ i < j}} \sum_{i \in I_3} x_{ijdt} + \sum_{\substack{j \in I_4 \\ i < j}} \sum_{i \in I_4} x_{ijdt} \right)$$

O modelo anteriormente descrito foi implementado na linguagem C++ com auxílio das bibliotecas do *Concert* do *CPLEX*. Foram considerados $T = 8$ períodos e que cada um teria 6 dias disponíveis para aplicação de provas, o caso mínimo visto que existem 11 disciplinas e pode-se alocar no máximo duas provas por dia. Desta forma, não se obteve solução pois o espaço factível é vazio.

Diante desta situação, a metodologia de Programação Linear por Metas pode auxiliar nas decisões, sendo as restrições relaxadas. Na seção seguinte esta metodologia será aplicada ao problema para que se possa encontrar uma solução.

4.2 Aplicação de Programação Linear por Metas

As restrições (1) e (2) não podem ser relaxadas por serem as restrições fortes do problema. As restrições que serão relaxadas são as (3), (4) e (5), sendo criadas as variáveis inteiras não-negativas w , v e u respectivamente para cada uma delas. Estas variáveis representam o quanto foram violadas estas restrições.

A restrição (5) passará a ser $F = u$, ou seja, a variável u representa quantos pares de disciplina de mesmo grupo foram alocados. A variável w será somada ao lado direito das restrições relativas às repetições no penúltimo dia. Já a variável v também será somada ao lado direito, mas das restrições de repetições nos últimos dias. Agora o objetivo se tornou minimizar estes desvios.

O método dos pesos é utilizado para formular a função objetivo. Cada variável de folga terá seu peso associado e seguindo o seguinte critério:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

Com essa formulação baseada em pesos, é possível definir as prioridades, ou seja, uma hierarquia dentre os objetivos que cabe ao decisor definir. A função objetivo definida é a seguinte:

$$\min f = P_1 w + P_2 v + P_3 u$$

Portanto, o modelo com a aplicação de Programação Linear por Metas para o Problema de Programação de Horários de Exames do COLUNI é o seguinte:

$$\min f = P_1 w + P_2 v + P_3 u \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \leq j}}^{|I|} \sum_{i=1}^{|I|} x_{ijdt} \leq 1 \quad \forall t \in \{1, \dots, |T|\}, d \in D_t \quad (8)$$

$$\sum_{d \in D_t} \left(\sum_{j=1}^i x_{jdt} + \sum_{j=i+1}^{|I|} x_{ijdt} \right) = 1 \quad \forall t \in \{1, \dots, |T|\}, \forall i \in I \quad (9)$$

$$\sum_{t=1}^{|T|} x_{ij(D_t-1)t} \leq 1 + w \quad \forall i, j \in I \quad (10)$$

$$\sum x_{ij|D_t|t} \leq 1 + v \quad \forall i, j \in I \quad (11)$$

$$F = u \quad (12)$$

$$x_{ijdt} \in \{0,1\} \quad (13)$$

$$w, v, u \in \mathbb{Z}^+ \quad (14)$$

As restrições (8) e (9) são mantidas pois tratam das restrições fortes do problema, respectivamente ocorrência de no máximo duas provas por dia e todos exames devem ser alocados uma e somente uma vez por período. Agora, as restrições (10), (11) e (12) possuem suas respectivas variáveis de folga w , v e u . Na função objetivo (7) busca-se minimizar as violações das restrições, considerando as prioridades dos objetivos que cada uma representa.

5. Resultados Computacionais

O modelo matemático foi implementado na linguagem C++ e foram utilizadas as bibliotecas do Concert do *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio V12.1*. O computador utilizado foi um notebook Dell inspiron N4050 com processador Intel(C) Core i5-2450M CPU 2.50 GHz, 4GB de memória RAM e sistema operacional Microsoft Windows 7 Home Basic 64 bits. Foram considerados todos os 8 períodos com 6 dias disponíveis para aplicação de prova e os seguintes pesos para as variáveis de folga:

$$P_1 = 0.10 \quad P_2 = 0.25 \quad P_3 = 0.65$$

Os pesos foram assim definidos por se considerar mais importante a não alocação de disciplinas de mesmo grupo. A seguir, deve-se buscar minimizar a variável v antes da variável w , em vista que a primeira representa as repetições no último dia e, logicamente, devem ser evitadas repetições nestes dias antes dos penúltimos dias de cada período.

A solução foi obtida em menos de 1 segundo e os valores encontrados para as variáveis de folga foram:

$$w = 1 \quad v = 0 \quad u = 0$$

Percebe-se que as variáveis u e v assumiram valor zero, o que significa que nenhum par de disciplinas de mesmo grupo foi alocado e que não houve repetições nos últimos dias. Já nos penúltimos dias nota-se que houve repetições, porque o valor de w encontrado foi 1. A grade de horários gerada se encontra na Tabela 2.

Tabela 2 – Grade horária de exames para o COLUNI gerada pelo modelo apresentado.

	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5	Dia 6
Período 1	BIOLOGIA MATEMÁTICA	QUÍMICA FÍSICA	FILOSOFIA INGLÊS	PORTUGUÊS GEOGRAFIA	ESPAÑHOL HISTÓRIA	SOCIOLOGIA
Período 2	SOCIOLOGIA INGLÊS	QUÍMICA MATEMÁTICA	ESPAÑHOL GEOGRAFIA	PORTUGUÊS HISTÓRIA	BIOLOGIA FÍSICA	FILOSOFIA
Período 3	PORTUGUÊS MATEMÁTICA	SOCIOLOGIA QUÍMICA	HISTÓRIA FÍSICA	FILOSOFIA ESPAÑHOL	INGLÊS	BIOLOGIA GEOGRAFIA
Período 4	SOCIOLOGIA QUÍMICA	HISTÓRIA FÍSICA	INGLÊS BIOLOGIA	FILOSOFIA PORTUGUÊS	GEOGRAFIA	ESPAÑHOL MATEMÁTICA

Período 5	BIOLOGIA GEOGRAFIA	FILOSOFIA PORTUGUÊS	SOCIOLOGIA ESPANHOL	INGLÊS HISTÓRIA	QUÍMICA MATEMÁTICA	FÍSICA
Período 6	ESPANHOL QUÍMICA	BIOLOGIA HISTÓRIA	FILOSOFIA FÍSICA	GEOGRAFIA MATEMÁTICA	SOCIOLOGIA PORTUGUÊS	INGLÊS
Período 7	INGLÊS BIOLOGIA	ESPANHOL GEOGRAFIA	PORTUGUÊS MATEMÁTICA	SOCIOLOGIA FÍSICA	FILOSOFIA	HISTÓRIA QUÍMICA
Período 8	SOCIOLOGIA MATEMÁTICA	FILOSOFIA ESPANHOL	INGLÊS GEOGRAFIA	HISTÓRIA QUÍMICA	BIOLOGIA FÍSICA	PORTUGUÊS

6. Conclusão

Um modelo matemático resolvido computacionalmente diminui o esforço da coordenação do colégio na produção de uma grade de horários de exames e a aplicação da metodologia de Programação Linear por Metas foi fundamental para contornar a infactibilidade do problema causada por restrições muito rígidas do modelo.

Para trabalhos posteriores, buscar-se-á definir restrições de repetição para todos os dias a fim de melhorar a solução, as quais serão relaxadas e inseridas na função objetivo com seus devidos pesos, que serão maiores para os últimos dias e menores para os primeiros.

7. Agradecimentos

Os autores agradecem à professora Lana Mara Rodrigues dos Santos pela orientação, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte oferecido e à coordenação do COLUNI pelas informações fornecidas.

8. Referências Bibliográficas

ANDRADE, P. R. L.; SCARPIN, C. T.; STEINER, M. T. A. *Geração da Grade Horária do Curso de Engenharia de Produção da UFPR Através de Programação Linear Binária*. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2012, Rio de Janeiro. *Anais eletrônicos* Rio de Janeiro: Editora, 2012. p. 1-12.

ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R. E YANASSE, H. *Pesquisa operacional para cursos de engenharia*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2007.

CARTER, M. W.; LAPORTE, G.; LEE, S. Y. Examination Timetabling: Algorithmic Strategies and Applications. *Journal of the Operational Research Society*, v. 47, n. 3, p. 373-383, março. 1996.

CHARNES, A.; Cooper, W. W. Goal programming and multiple objective optimizations. *European Journal of Operational Research*, v. 1, n. 1, p. 39-54, março, 1977.

COLUNI: Colégio de Aplicação. Viçosa, 2013. Disponível em: <<http://www.coluni.ufv.br/?area=sobre>>. Acesso em: 21 abril. 2013.

GOMES, C. F. S. *Aplicação da programação por metas e método lexicográfico ao método STEM - Nova proposta de algoritmo de formulação linear multiobjetivo*. XXXVI SBPO, São João del-Rei - MG, p. 1099-1109, novembro de 2004.

IBM ILOG. CPLEX 12.1 User's Manual. 2009.

SANTOS, H. G.; SOUZA, M. J. F. *Programação de Horários em Instituições Educacionais: Formulações e Algoritmos*. 2007. 55p.

URÍA, M. V. R.; CABALLERO, R.; RUIZ, F.; ROMERO, C.(2002). *Meta-goal programming*. European Journal of Operational Research, vol. 136, n.2, 422-429.