

Estudos sobre modelagem e simulação de sistemas de filas M/M/1 e M/M/2

Paulo Henrique Borba Florencio (PUC-GO) – phenrique3103@gmail.com

Maria José Pereira Dantas (PUC-GO) – mjpdantas@gmail.com

Resumo: Modelos de simulação possibilitam obter, de modo relativamente rápido e barato, estimativas do desempenho de configurações de um sistema e/ou alternativas de procedimentos operacionais. Desta forma, o artigo demonstra a aplicação da simulação de um modelo de filas M/M/1 e M/M/2, com o auxílio do Excel, tendo como foco principal o tempo de espera e a taxa de ocupação dos servidores, analisando o comportamento da fila apresentando um comparativo entre o valor analítico e o simulado demonstrando que a simulação pode ser utilizada com confiabilidade para imitar a realidade de uma fila e assim prever as necessidades e eventuais problemas.

Palavras Chave: Simulação, Teoria de Filas, Ocupação do Sistema.

1. Introdução

A simulação é uma poderosa ferramenta para a tomada de decisões no desenvolvimento de sistemas mais eficientes. O seu uso durante o desenvolvimento é uma técnica preditiva e preventiva, onde respostas para questões situacionais irão auxiliar em tomadas de decisões e podem evitar cobranças futuras quanto a questões não levantadas ou analisadas no momento da implantação de determinado processo. (OLIVEIRA, 2007).

O mesmo autor ainda destaca que um grande benefício da utilização da simulação em ambientes manufatureiros é a possibilidade de obter uma visão geral (macro) do efeito de uma pequena mudança (micro) no sistema, propiciando aumento de produtividade, aumento das taxas de utilização de equipamentos e funcionários, redução das necessidades de capital além de garantir que o projeto do sistema proposto opere conforme o esperado.

Por outro lado, a fila é consequência de um descompasso entre a capacidade de atendimento do serviço oferecido e a demanda de seus usuários. Um sistema de filas pode ser definido como clientes chegando, esperando pelo serviço (se não forem atendidos imediatamente) e saindo do sistema após o atendimento.

De acordo com (MOREIRA 2007), “teoria das filas é um corpo de conhecimentos matemáticos, aplicado ao fenômeno das filas.” É um ramo da probabilidade que estuda a formação de filas, através de análises matemáticas precisas e propriedades mensuráveis das filas. Ela provê modelos para demonstrar previamente o comportamento de um sistema que ofereça serviços cuja demanda cresce aleatoriamente, tornando possível dimensioná-lo de forma a satisfazer os clientes e ser viável economicamente para o provedor do serviço, evitando desperdícios e gargalos. (PRADO,2009).

Observar uma quantidade de ocorrências em uma fila com a finalidade de descrever o modelo analítico com o real não é o mais recomendado, por isso LAW(2010) descreve que a partir dos tempos médios de chegada e dos tempos médios de atendimento observados, deve-se utilizar um algoritmo de geração de números aleatórios que simulem tais chegadas à fila. O

mesmo autor nos adverte que não se deve pegar o resultado de uma única simulação e a considerar como verdadeira, pois, por se tratar de números aleatórios, pode haver divergências entre uma e outra simulação. Desta forma o ideal é executar a simulação várias vezes e trabalhar sempre com as médias dos resultados obtidos.

Para elaboração deste artigo foi inicialmente analisado um sistema de fila única, com um único canal de atendimento (M/M/1) e posteriormente com dois canais de atendimento (M/M/2); sendo que as chegadas e frequência de atendimento seguem as distribuições de Poisson ou Exponencial e os processos foram geridos por ordem de chegada (FIFO). Após elaboração do modelo construiu-se um paralelo entre os cálculos, analíticos e simulados, com o objetivo de conhecer a fundo a natureza da simulação, suas vantagens e desvantagens, restrições e viabilidade, onde e como aplicar e quais as suas limitações.

Para tal o artigo está organizado da seguinte maneira: a segunda seção é composta pelo referencial bibliográfico sobre simulação, distribuição exponencial, processos estocásticos e markovianos e teoria das filas, que será a base do estudo, a terceira seção descreve a metodologia apresentada por CHWIF (1999) utilizada para elaboração, a quarta seção apresenta a integração dos métodos e os principais resultados obtidos mostrando um paralelo entre o sistema simulado e o sistema analítico de um mesmo cenário, a quinta e última seção traz as conclusões do estudo avaliando os resultados obtidos.

2. Referencial Teórico

2.1 Simulação

Para (FERREIRA, 1999), simulação se refere a técnicas, largamente usadas em pesquisa operacional e ciência do gerenciamento, para imitar ou simular, usando computadores ou não, a operação de várias classes de processos ou serviços do mundo real ou de sistemas idealizado para melhorar o desempenho do mesmo através da comparação de alternativas e da análise de sensibilidade dos parâmetros do sistema.

Ao simular a distribuição de chegada de clientes através do tempo decorrido entre chegadas sucessivas de clientes pode-se trabalhar com vários métodos de distribuições entre eles a distribuição de probabilidade de Poisson e a distribuição exponencial.

(MEYER, 1974:176 *apud* ABENSUR 2003, et al) esclarece que a distribuição de probabilidade de Poisson é um modelo adequado de previsão para uma grande classe de fenômenos. Em geral a distribuição de Poisson pode ser empregada quando as variáveis aleatórias analisadas possam ser representadas pelo número de ocorrências de algum evento (frequência), durante um intervalo de tempo de comprimento t .

PINHEIRO (2013) relata que a distribuição exponencial é um método alternativo para descrever a distribuição de chegadas de clientes, é através do tempo decorrido entre chegadas sucessivas de clientes. A distribuição de probabilidade $F(t)$, em que o tempo interchegadas (ti) é menor que t , para a distribuição discreta de Poisson de chegadas $P(\text{Tempo Interchegadas} < t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \lambda > 0, t > 0$ apresentado na figura 1.

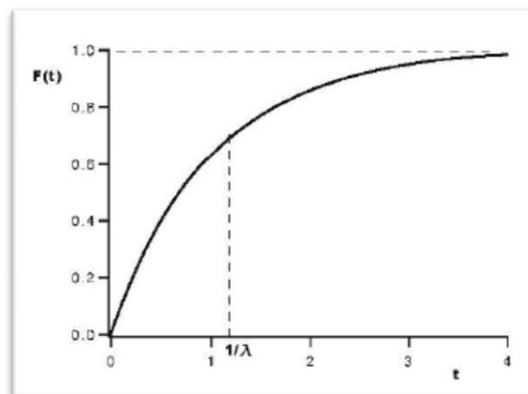


FIGURA 1 – Distribuição Exponencial de Tempos e Interchegadas. Fonte: JAIN (1991), *apud* PINHEIRO (2013)

Carson (2004) sugere o uso de um modelo de simulação para experimentar, avaliar e comparar, qualquer número de alternativas de um sistema. Segundo o autor a avaliação, a comparação e a análise são as razões chaves de se fazer simulação. Predição do desempenho do sistema, identificação de problemas e suas causas, são os resultados chaves que se busca atingir.

A modelagem de sistemas consiste na construção de modelos para representá-los, (MOORE e WEATHERFORD, 2005) defendem a aplicação do método de modelagem para dar suporte à decisão gerencial através do desenvolvimento de um modelo da situação gerencial, a utilização de uma ferramenta para a realização de análise do modelo e a tomada de decisão baseada nesta análise. PERIN(1995) demonstra uma proposta de modelagem de simulação como modelo matemático, onde $i=1...n$, tendo os seguinte cálculos para fila M/M/1 e M/M/2:

Tabela 1 – Fórmulas para cálculo da Fila M/M/1 e M/M/2

Parâmetro	Fórmula Para Fila M/M/1		Fórmula Para Fila M/M/2	Nr.
Intervalo Entre as Chegadas	Ri	Ri	$\frac{\ln(1 - \text{aleatório}())}{\lambda}$	(1)
Tempo de Atendimento	Si	Si	$\frac{\ln(1 - \text{aleatório}())}{\mu}$	(2)
Momento da Chegada	Ai	$Ai_{-1} + Ri$	Idem M/M/1	(3)
Início do Atendimento	Bi	$\text{Max}\{Ci_{-1}; Ai\}$	$\text{Max}\{Ai; \text{Min}\{C_{i-1}^1; C_{i-1}^2\}\}$	(4)
Término do Atendimento	Ci	$Ci = Bi + Si$	Idem M/M/1	(5)
Término Atendimento no Ci^1	Ci^1	Não se Aplica	$\left\{ \begin{array}{l} Ci, \text{ Se } C_{i-1}^1 \leq C_{i-1}^2 \\ C_{i-1}^1, \text{ Se } C_{i-1}^1 > C_{i-1}^2 \end{array} \right\}$	(6)
Término Atendimento no Ci^2	Ci^2	Não se Aplica	$\left\{ \begin{array}{l} Ci, \text{ Se } C_{i-1}^1 > C_{i-1}^2 \\ C_{i-1}^2, \text{ Se } C_{i-1}^1 \geq C_{i-1}^2 \end{array} \right\}$	(7)
Tempo de Fila	Wi	$Bi - Ai$	Idem M/M/1	(8)
Tempo de Sistema	Ui	$Ci - Ai$	Idem M/M/1	(9)
Tempo Ocioso do Servidor	Oi	$Bi - Ci_{-1}$	$\left\{ \begin{array}{l} (Bi - C_{i-1}^1), \text{ Se } (C_i^1 <> C_{i-1}^1) \\ (Bi - C_{i-1}^2), \text{ Se } (C_i^2 <> C_{i-1}^2) \end{array} \right\}$	(10)
Média Temporal	\bar{w}	$\frac{\sum Wi}{n}$	Idem M/M/1	(11)

Fonte: (Adaptado de PERIN, 1995)

2.2 Processos Estocásticos

Para (JAIN, 1991 *apud* PINHEIRO, 2013) um Processo Estocástico é definido como uma coleção de variáveis randômicas ($X(t)$) indexadas por um parâmetro t pertencente a um conjunto T . Frequentemente T é tomado para ser o conjunto dos inteiros não negativos (porém, outros conjuntos são perfeitamente possíveis) e $X(t)$ representa uma característica mensurável de interesse no tempo t . Exemplificando, $X(t)$ pode representar o nível de estoque de um produto no fim da semana t . Formalmente, a notação $\{X_t ; t \in T\}$ define processo estocástico sobre um dado espaço de probabilidade.

Os processos de Markov constituem um tipo especial de processo estocástico que possui a propriedade de que as probabilidades associadas com o processo num dado instante do futuro dependem somente do estado presente, sendo, portanto, independentes dos eventos no passado. Desse modo são caracterizados pelo que se designa como ‘falta de memória’.

FIGUEIREDO (2010) relata que no mundo real há diversos sistemas dinâmicos que podem ser modelados como processos de Markov tais como o planejamento de atendimento a filas que são normalmente modelados pelo processo de “nascimento e morte” (figura 2), avaliação de equipamentos em operação numa linha de produção industrial, estudo de fenômenos econômicos e movimentos sociais, etc.

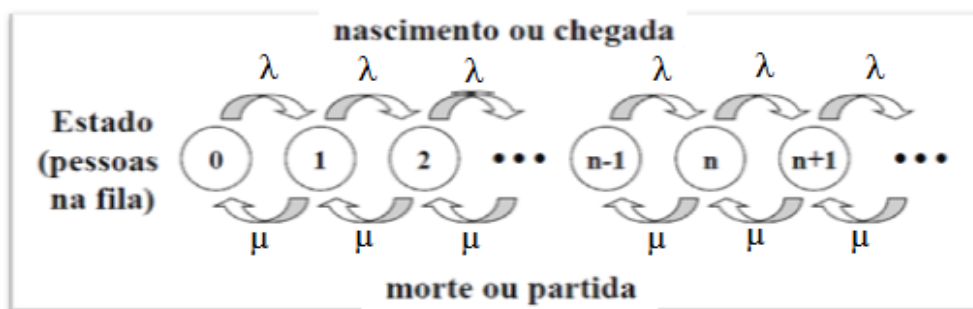


FIGURA 2 – Processo de “Nascimento e Morte”. Fonte: PINHEIRO (2013), *apud* JAIN (1991)

2.3 Teoria das Filas

De acordo com (MOREIRA, 2007 *apud* MORAES, et al 2011), “teoria das filas é um corpo de conhecimentos matemáticos, aplicado ao fenômeno das filas.” Os sistemas de filas se descrevem, de forma geral, por um processo de chegada de clientes (ou produtos) a um sistema de atendimento (beneficiamento, produção) para receber um ou mais serviços, executados por certa quantidade de servidores. Nesse sentido, as formações de filas ocorrem porque a procura pelo serviço é maior do que a capacidade do sistema de atender a esta procura.

Como forma de aferir o comportamento do sistema de filas, associa-se medidas de desempenho como tempo médio de espera dos clientes na fila, tempo médio de chegada de clientes, probabilidade de encontrar o sistema lotado, entre outras.

De acordo com Bronson (1985) *apud* Barbosa (2009), o sistema de filas é caracterizado por cinco componentes: modelo de chegada dos usuários, modelo de serviço, número de atendentes, capacidade do sistema para atender usuários e disciplina da fila.

- a) Modelo de chegada dos usuários – distribuição de probabilidade dos períodos de tempo entre as chegadas e as saídas dos usuários da fila.
- b) Modelo de Serviço – de probabilidade dos tempos de serviço para cada usuário.

- c) Número de Atendentes – Quantidades de atendentes (servidores) disponíveis.
- d) Capacidade do Sistema – número máximo de usuários que podem permanecer ou entrar na fila, ser atendido e sair.
- e) Disciplina da Fila – a ordem que os usuários aguardam para acessar os serviços. A disciplina mais comum é a FIFO (*First In First Out*), porém existem outras como a LIFO (*Last In First Out*), a SIRO (*Selection In Random Order*) ou ainda disciplinas por algum critério de prioridade: O mais novo, o mais antigo, o mais grave (hospitais, por exemplo), dentre outras.

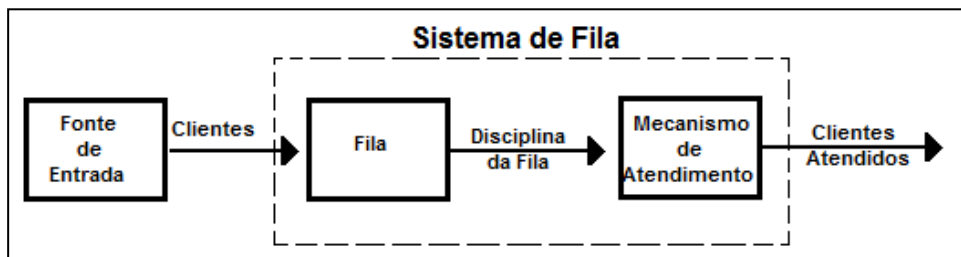


Figura 3 – Representação esquemática de uma fila . Fonte: BRONSON (1985) *apud* BARBOSA (2009)

A figura 3 retrata uma representação esquemática de uma fila onde as equações desse modelo são baseadas nas seguintes características dos processos de chegada e de atendimento aos clientes:

- As chegadas se processam segundo uma distribuição de Poisson com média λ chegadas/tempo.
- Os tempos de atendimento seguem a distribuição exponencial com média $1/\mu$ (o número de atendimentos segue a distribuição de Poisson com média μ).
- O atendimento à fila é feito por ordem de chegada (FIFO).
- O número de clientes potenciais é suficientemente grande para que a população possa ser considerada infinita.

Uma das notações usadas para a especificação de filas é a feita por Kendall, definida como $v/w/x/y/z$, em que v indica o modelo de chegada, w denota o modelo de serviço, x significa o número de atendentes disponíveis, y representa a capacidade do sistema e z designa a disciplina da fila (BRONSON, 1985:287 *apud* ABENSUR et al, 2003).

A taxa de utilização menor que um, indica que o sistema opera com estabilidade, o que permite o estudo analítico do sistema de filas (ANDRADE, 2002 *apud* BARBOSA, 2009). Para o estudo analítico desse sistema, parâmetros de operacionais que são calculados através das seguintes equações da tabela 2 - Parâmetros do modelo M/M/1:

Tabela 2 – Parâmetros do modelo M/M/1

Parâmetros	Símbolo	Fórmula	Nr.
Número Esperado Sistema	L	$\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	(12)
Número Esperado na Fila	L_q	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$	(13)
Tempo Previsto de Espera (Incluindo o tempo do serviço)	W	$\frac{1}{\mu - \lambda}$	(14)
Tempo Previsto na Fila	W_q	$\frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$	(15)
Probabilidade de que o sistema esteja vazio	P_0	$1 - \frac{\lambda}{\mu}$	(16)
Utilização do Sistema	ρ	$\frac{\lambda}{s\mu}$	(17)

Fonte: adaptado de Moore & Weatherford (2005)

(GROSS E HARRIS 1974 *apud* FIGUEIREDO e ROCHA 2010 *apud*) mostram as principais equações do modelo $M/M/s$, cujas deduções, que têm como base o modelo $M/M/1$ (uma fila e um canal de atendimento), segundo a distribuição de Poisson e Exponencial Negativa, respectivamente; o atendimento é feito por ordem de chegada onde s é o número de servidores. As equações para o cálculo dos parâmetros operacionais seguintes na tabela 3:

Tabela 3 - Parâmetros do modelo M/M/S

Parâmetros	Símbolo	Fórmula	Nr.
Probabilidade do Sistema Estar Vazio	P_0	$\frac{1}{\sum_{j=0}^{i=1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^s}{(s-1)!(s-\rho)}}$	(18)
Probabilidade de Que Todos os Canais Estejam Ocupados	P_{ocup}	$\frac{\rho^2}{(s-1)!(s-\rho)} P_0$	(19)
Número Esperado na Fila	L_q	$\frac{P_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2}$	(20)
Número Esperado no Sistema	L	$L_q + \rho$	(21)
Probabilidade de que o sistema esteja vazio	P_0	$1 - \frac{\lambda}{\mu}$	(22)
Tempo Previsto de Espera (inclui o tempo de serviço)	W	$W_q + \frac{1}{\mu}$	(23)

Fonte: adaptado de Moore & Weatherford (2005).

3. METODOLOGIA

O artigo foi desenvolvido de acordo com a metodologia CHWIF & MEDINA (2010), o qual propõe três fases para a condução de um projeto de simulação: a concepção, a implementação e análise dos resultados do modelo. Na primeira fase o analista de simulação deve entender claramente o sistema a ser simulado, decidir qual é a abrangência do modelo e o nível de detalhe, para enfim transformar o modelo em modelo conceitual através de uma técnica apropriada de representação de modelo. Na segunda fase, através do modelo

conceitual definido na fase anterior, é feita a implementação através de um modelo computacional utilizando um software de simulação comercial, no caso deste artigo, foi utilizado o Excel dada a simplicidade do modelo. Na terceira fase, com o modelo computacional já pronto, realizam-se os experimentos. Temos então o Modelo Experimental. A partir desse momento, são realizadas várias “rodadas” no simulador e analisados os resultados. Caso seja necessário, fazem-se alguns ajustes no modelo computacional e reinicia as “rodadas”.

4. EXPERIMENTAÇÃO

Para exemplificação dos conceitos apresentados até aqui, foi elaborado alguns experimentos através da simulação de uma fila de espera com um único servidor, fila M/M/1 e uma simulação com dois servidores, fila M/M/2. O tempo entre as chegadas são aleatórias com distribuição exponencial com média de 1 minuto, 0.9 minutos, 0.8 minutos, 0.7 minutos e 0.505 minutos com tempo de atendimento de meio minuto, tais dados foram modelados como variáveis aleatórias com distribuição exponencial, o número de chegadas segue a distribuição de Poisson com média λ , o intervalo entre duas chegadas segue a distribuição exponencial negativa com média $1/\lambda$. Para realização da simulação temos os seguintes tempos médios:

$E(x1)$ - Tempo médio entre as chegadas = 1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6 e 0,505

$E(x2)$ - Tempo médio de atendimento = 0,5

Temos que: $\lambda=1/E(x1)$ e $\mu=1/E(x2)$. Portanto o nível de serviço μ é 2 e o valor da taxa de chegada λ é vai variar conforme o experimento, sendo de 1; 1,111; 1,250; 1,429; 1,667 e 1,98 respectivamente.

Para o experimento utilizou-se o software Excel e para os intervalos de chegada e o tempo de atendimento, foi utilizado o método da transformada inversa, que consiste em gerar um número aleatório e em seguida transformá-lo em um valor da variável com distribuição exponencial de interesse, utilizando o gerador de números aleatórios do Excel sendo as seguintes formulas:

Gerador aleatório para os tempos das chegadas: $(-LN(1-(ALEATÓRIO())))/\lambda$ (24)

Gerador aleatório para os tempos de atendimentos: $(-LN(1-(ALEATÓRIO())))/\mu$ (25)

Tabela 4 – Fórmulas utilizadas no excel – Fila M/M/1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L
1		$\lambda = 1$				$\mu = 2$					
2											
3	i	Intervalo entre Chegadas ri	Tempo de Atendimento si	Chegada ai	Início de Atendimento bi	Término de Atendimento ci	Tempo de Fila wi	Tempo de Sistema ui	Tempo Ocioso oi	Média Temporal Wmedio	Ro Estimado
4	0										
5	1	$=(-LN(1-(ALEATÓRIO())))/\$C\$1$	$=(-LN(1-(ALEATÓRIO())))/\$G\$1$	$=D4 + B5$	$=MÁXIMO(F4;D5)$	$=E5 + C5$	$=E5 - D5$	$=F5 - D5$	$=E5 - F4$	$=MÉDIA(\$G\$5;G5)$	$=1 - (I5 / F5)$
6	2	$=(-LN(1-(ALEATÓRIO())))/\$C\$1$	$=(-LN(1-(ALEATÓRIO())))/\$G\$1$	$=D5 + B6$	$=MÁXIMO(F5;D6)$	$=E6 + C6$	$=E6 - D6$	$=F6 - D6$	$=E6 - F5$	$=MÉDIA(\$G\$5;G6)$	$=1 - (I6 / F6)$
7	3	$=(-LN(1-(ALEATÓRIO())))/\$C\$1$	$=(-LN(1-(ALEATÓRIO())))/\$G\$1$	$=D6 + B7$	$=MÁXIMO(F6;D7)$	$=E7 + C7$	$=E7 - D7$	$=F7 - D7$	$=E7 - F6$	$=MÉDIA(\$G\$5;G7)$	$=1 - (I7 / F7)$
8	4	$=(-LN(1-(ALEATÓRIO())))/\$C\$1$	$=(-LN(1-(ALEATÓRIO())))/\$G\$1$	$=D7 + B8$	$=MÁXIMO(F7;D8)$	$=E8 + C8$	$=E8 - D8$	$=F8 - D8$	$=E8 - F7$	$=MÉDIA(\$G\$5;G8)$	$=1 - (I8 / F8)$

Fonte: Autor

Na simulação foi produzida uma planilha em excel com o modelo representado na tabela 4 com as fórmulas da simulação. Devido tempo de simulações, que resultou em 1000 chegadas ao sistema, a tabela 5 apresenta apenas os dez primeiros valores como exemplo dos resultados que serão obtidos na simulação da Fila M/M/1 e M/M/2.

Tabela 5 – Exemplo dos Resultados Obtidos com a Simulação de uma Fila M/M/1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L
1		$\lambda = 1$				$\mu = 2$					
2											
3	i	Ri	Si	Ai	Bi	Ci	Wi	Ui	Oi	Wq	Rô
4	0										
5	1	0,331660528	0,522581044	0,331660528	0,331660528	0,854241572	0	0,522581044	0,331660528	0	61,17%
6	2	1,606431304	0,282161511	1,938091832	1,938091832	2,220253343	0	0,282161511	1,08385026	0	36,25%
7	3	1,556180766	0,103850452	3,494272598	3,494272598	3,59812305	0	0,103850452	1,274019254	0	25,25%
8	4	1,270608566	0,06116213	4,764881163	4,764881163	4,826043293	0	0,06116213	1,166758114	0	20,09%
9	5	1,396075015	0,313753562	6,160956178	6,160956178	6,47470974	0	0,313753562	1,334912885	0	19,82%
10	6	0,899200241	0,609533962	7,060156419	7,060156419	7,669690381	0	0,609533962	0,585446679	0	24,68%
11	7	0,056708342	0,368249138	7,116864761	7,669690381	8,037939519	0,55282562	0,921074758	0	0,078975089	28,13%
12	8	0,077518962	0,710425149	7,194383723	8,037939519	8,748364668	0,843555796	1,553980945	0	0,174547677	33,97%
13	9	1,009807091	0,178503724	8,204190814	8,748364668	8,926868392	0,544173854	0,722677577	0	0,215617252	35,29%
14	10	0,347267997	0,165526671	8,551458811	8,926868392	9,092395063	0,375409581	0,540936252	0	0,231596485	36,47%

Fonte: Autor

Para avaliação da convergência do tempo entre as chegadas e tempo de atendimento foi elaborado dois histogramas sendo, o Histograma Ri- Tempo entre as chegadas (r_i) com os dados de r_1 e o Histograma Si- tempo de atendimento (s_i) com os dados de s_1 .

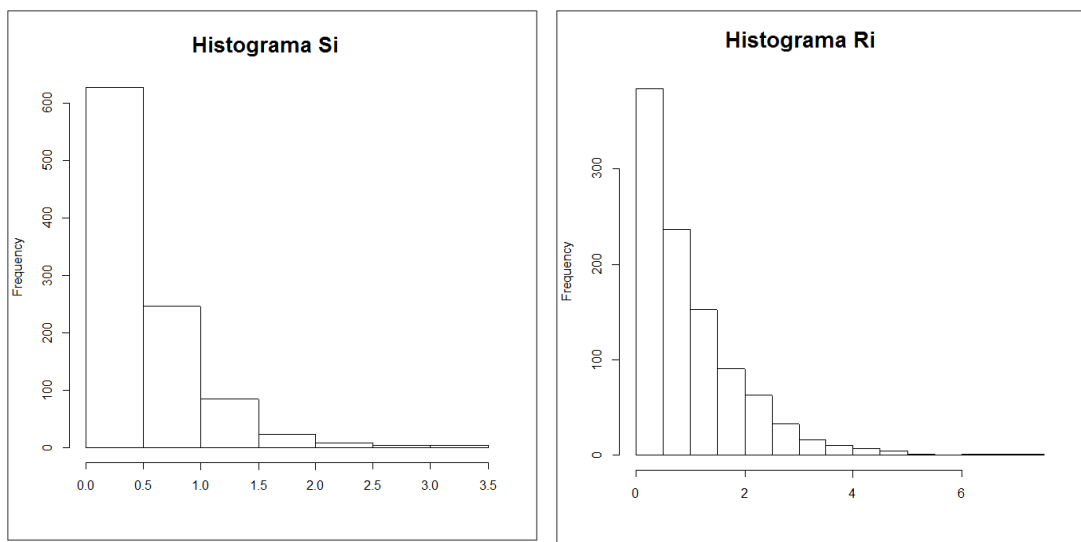


Figura 4 – Histograma de Ri e Si. Fonte: Autor

Tabela 6 – Modelo analítico gerados pelo Solver

	Ri	Si
Média (Esperança)	0,987279808	0,505434108
E Modelo Analítico	1	0,5
Variância Analítica	1	0,25
Variância Simulada	0,959777007	0,238541518

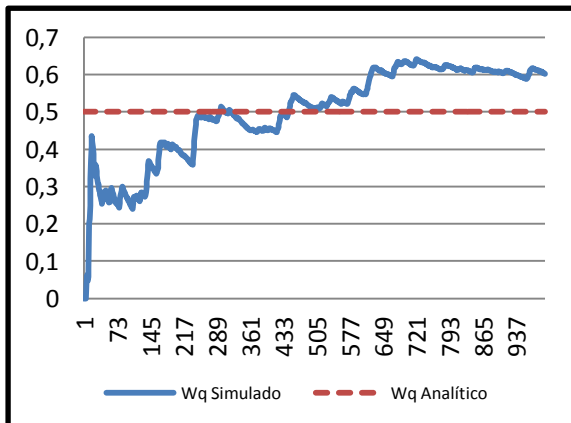
Fonte: Autor

Na figura 4 está representado o Histograma de Ri e Si os quais tem média de 1 e 0,5, respectivamente, na tabela 6 onde estão demonstrados as médias, E Modelo Analítico, a Variância Analítica e a Variância Simulada de Ri e de Si , pode-se notar que a Média e o E Modelo Analítico estão com valores bem próximos, assim como a Variância Analítica e a

Variância Simulada, por esse motivo é dado como válido o modelo simulado com base no modelo analítico.

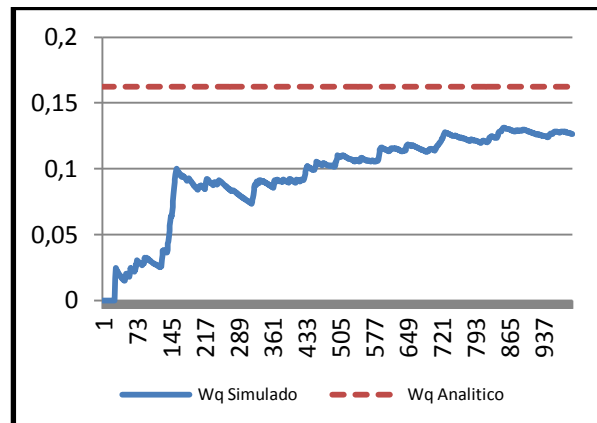
Posteriormente foram elaboradas as medidas do tempo médio de espera na fila (wq) e ocupação do servidor (ρ) para $n=1, 2, \dots, 1000$, seguem nos gráficos 1 e 2 – wq simulado x analítico para o modelo de fila M/M/1 e M/M/2, conforme apresentados:

GRÁFICO 1 – Permanência na Fila M/M/1



Fonte: Autor

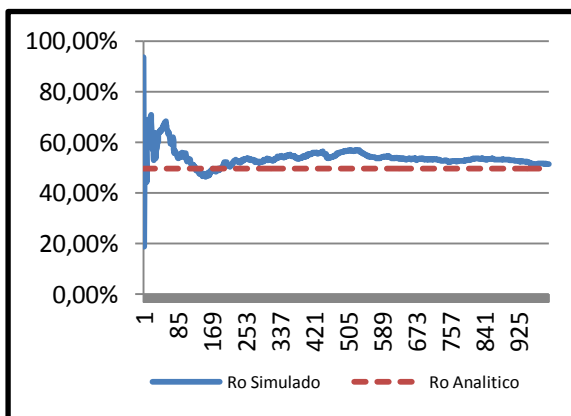
GRÁFICO 2 – Permanência na Fila M/M/2



Fonte: Autor

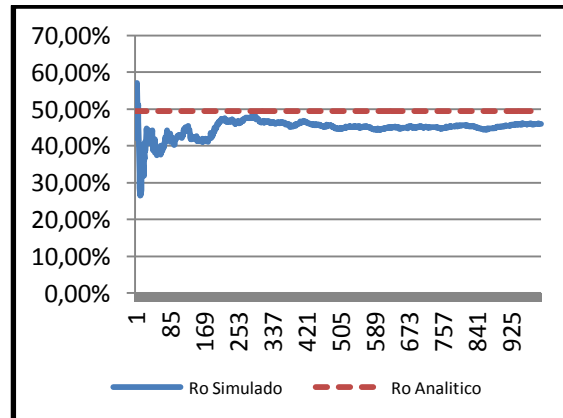
Nota-se que para a média de permanência na fila, quando se trabalha com um único servidor, os valores apurados pela simulação de 1.000 ocorrências tende a se aproximar do valor analítico ficando de forma equalizada, porém no caso de se trabalhar com dois servidores o tempo de simulação torna-se insuficiente para chegar a essa conclusão, necessitando de um tempo maior de simulação com mais chegadas ao sistema.

GRÁFICO 3 – Utilização do Servidor – Fila M/M/1



Fonte: Autor

GRÁFICO 4 – Utilização do Servidor – Fila M/M/2



Fonte: Autor

Quanto ao nível de utilização do servidor, tanto no M/M/1 com intervalos de chegadas médias de 1 minuto e atendimento dois clientes por minuto, quanto no M/M/2 com intervalos de chegas de próximo a 2 minutos e intervalor de atendimento de 2 clientes por minuto, os valores simulados se equalizam com quantidades bem inferiores as 1.000 ocorrências, o que também confirma a validade do modelo.

Por se trabalhar com números aleatórios observa-se uma grande variabilidade entre uma simulação e outra o que nos direciona a trabalhar com a média de várias simulações para diminuir ou até mesmo eliminar os efeitos de tais variabilidades. Assim buscou-se apresentar

dez simulações e analisar as médias obtidas com a Média Temporal e a Taxa de Utilização do Sistema comparando-as com o modelo analítico apresentado.

A solução com o modelo analítico, com base nas formulas apresentadas anteriormente são de 50% para utilização média do servidor e de 1,0 minuto de espera média na fila. Nas tabelas a seguir estão descritos os resultados analíticos e simulados para as filas M/M/1 e M/M/2 as quais estaremos discutindo a seguir:

Tabela 7 – Valores Simulado e Analítico de uma fila M/M/1

simulacao	Quantidade de Servidores = 1				Quantidade de Clientes (i) = 1.000							
	$\lambda = 1$		$\lambda = 1,111$		$\lambda = 1,250$		$\lambda = 1,429$		$\lambda = 1,667$		$\lambda = 1,98$	
	Média Temporal	Ro	Média Temporal	Ro	Média Temporal	Ro	Média Temporal	Ro	Média Temporal	Ro	Média Temporal	Ro
Wmedio	Estimado	Wmedio	Estimado	Wmedio	Estimado	Wmedio	Estimado	Wmedio	Estimado	Wmedio	Estimado	
1	0,436604	49,01%	0,402069	49,03%	0,655429	61,22%	1,180795	72,28%	2,063605	85,51%	7,613495	0,962979
2	0,341008	45,06%	0,508697	53,32%	0,869	66,00%	1,12673	67,80%	1,84927	80,11%	17,58021	0,941181
3	0,414738	49,54%	0,585167	54,54%	0,537333	55,27%	0,934059	70,37%	3,292643	86,59%	10,48014	0,968289
4	0,366108	45,68%	0,632451	58,65%	1,000981	66,71%	0,909711	69,93%	1,567882	78,43%	13,31532	0,982068
5	0,495781	50,95%	0,614213	58,86%	1,047637	65,10%	1,007358	67,12%	1,464648	80,44%	16,77344	0,991779
6	0,560531	50,35%	0,718917	55,91%	1,138662	66,19%	1,103171	67,65%	1,518269	77,50%	14,00806	0,979988
7	0,576592	50,65%	0,663115	56,10%	0,93276	65,70%	1,739685	71,74%	1,801065	83,53%	8,345317	0,956263
8	0,488069	47,49%	0,941055	59,04%	1,043331	62,92%	1,154477	73,21%	2,150271	84,63%	18,10227	0,986569
9	0,564666	52,12%	0,591143	55,44%	0,695437	60,87%	0,73896	68,01%	1,604168	80,53%	13,02969	0,971928
10	0,548113	49,97%	0,546187	53,00%	0,698948	60,29%	1,030218	69,42%	1,890916	81,97%	11,37314	0,992559
Simulado	0,479221	49,08%	0,620301	55,39%	0,861952	63,03%	1,092516	69,75%	1,920274	81,92%	13,06211	97,34%
Analítico	0,500	50,00%	0,625	55,56%	0,833	62,50%	1,251	71,45%	2,503	83,35%	49,500	99,00%

Fonte: Autor

Tabela 8 – Valores Simulado e Analítico de uma fila M/M/2

simulacao	Quantidade de Servidores = 2				Quantidade de Clientes (i) = 1.000							
	$\lambda = 1$		$\lambda = 1,111$		$\lambda = 1,250$		$\lambda = 1,429$		$\lambda = 1,667$		$\lambda = 1,98$	
	Média Temporal	Ro	Média Temporal	Ro	Média Temporal	Ro	Média Temporal	Ro	Média Temporal	Ro	Média Temporal	Ro
Wmedio	Estimado	Wmedio	Estimado	Wmedio	Estimado	Wmedio	Estimado	Wmedio	Estimado	Wmedio	Estimado	
1	0,023926	24,12%	0,034979	28,11%	0,056134	31,32%	0,072592	34,82%	0,090224	41,52%	0,11591	47,79%
2	0,044081	25,35%	0,026495	26,77%	0,072594	32,90%	0,07374	36,88%	0,09653	41,29%	0,189776	49,48%
3	0,025345	23,83%	0,044527	26,64%	0,064205	30,90%	0,05787	34,89%	0,100737	42,49%	0,13899	46,35%
4	0,023696	22,27%	0,033327	26,77%	0,054651	31,64%	0,057178	34,35%	0,087485	41,14%	0,132581	49,40%
5	0,036517	25,48%	0,040527	29,08%	0,049641	31,40%	0,082314	35,72%	0,084904	40,72%	0,203908	52,48%
6	0,020696	25,10%	0,024972	28,40%	0,071229	30,97%	0,086428	37,37%	0,093253	39,56%	0,282038	54,37%
7	0,027596	26,10%	0,034005	26,47%	0,039538	30,83%	0,060719	34,32%	0,10092	41,30%	0,218944	49,31%
8	0,044274	27,17%	0,027373	26,17%	0,045106	32,04%	0,089656	38,75%	0,145683	42,34%	0,17713	51,40%
9	0,036717	25,09%	0,044686	26,99%	0,059392	30,76%	0,063216	35,13%	0,068873	38,55%	0,168177	52,15%
10	0,028088	24,42%	0,039448	26,41%	0,049443	31,01%	0,043572	34,10%	0,09404	40,68%	0,221767	55,05%
Simulado	0,031094	24,89%	0,035034	27,18%	0,056193	31,38%	0,068728	35,63%	0,096265	40,96%	0,184922	50,78%
Analítico	0,3333	25,00%	0,0418	27,78%	0,0541	31,25%	0,0731	35,73%	0,1051	41,68%	0,1623	49,50%

Fonte: Autor

Pode-se notar com valores apresentados nas tabelas 7 e 8 é que, independente do valor de λ , existe uma variabilidade grande o que pode gerar algumas incoerências no momento das análises, caso se deseje uma acurácia maior do processo, sugere-se que a simulação seja repetida várias vezes para que possa ter uma representatividade que aumente o índice de confiança com a média dos valores obtidos.

Nestas mesmas tabelas são apresentados também os tempos médios de espera na fila (Média Temporal) e o tempo de ocupação do servidor (*Ro Simulado*) bem como os valores analíticos para comparação. Para finalizar a análise tais tempos, foram acelerados na fila com da taxa de

chegadas (wq) com os valores 0,9; 0,8; 0,7; 0,6 até 0,505. Verifica-se que a medida que o tempo médio entre chegadas diminui, a taxa de ocupação do servidor aumenta. Enquanto os valores de entrada e atendimento são distantes, 1 e 0,505, os resultados obtidos nas simulações são próximos dos resultados do método analítico. Quando os valores de entrada ficam muito próximos aos de atendimento, $E(x_1) = 0,505$ e $E(x_2) = 0,5$, a simulação apresenta valores distantes dos obtidos pelo método analítico quando se trabalha apenas com um servidor, pois com $\rho = 0,505$, o tempo de espera na fila no modelo analítico seria de 49 minutos enquanto o simulado apresenta valores de 13 minutos.

Já a taxa de ocupação, converge a quase que 100% porque os valores já estão próximos ao limite teórico da distribuição de Poisson, onde $\rho < 1$ e o valor de ρ está muito próximo a esse limite, sendo necessária a abertura de outro servidor, passando M/M/1 para M/M/2.

5. Conclusão

Os resultados da modelagem analítica e simulação, em comparação ao referencial teórico, demonstram que a simulação tem papel de suma importância ao se trabalhar com teoria das filas. Uma das grandes vantagens que cabe destacar é a possibilidade de diminuir as incertezas ao simular vários cenários, alternando entre tempo médio de chegadas, tempo médio de atendimento e assim dimensionando a quantidade de servidores necessários a cada situação.

Porém existem também algumas desvantagens da simulação e a principal é o fato de não representar com grande exatidão o evidenciado na prática, mas como demonstrado no decorrer desse artigo, pode-se diminuir essas incoerências com algumas técnicas como aumento das simulações bem como não se utilizar uma única simulação como verdadeira e útil a análise do exposto.

Outro fator notório é que os resultados analíticos e simulados são praticamente idênticos para as metodologias. Em ambas devem ser conhecidas as distribuições de frequências que regem cada processo no sistema: chegada, atendimento, falhas, e outros. A diferença entre os métodos está no conceito de que a Teoria de Filas irá solucionar analiticamente o problema, através do equacionamento do modelo de filas, sendo isto por vezes muito difícil, quando as distribuições de frequência não são as mais comuns. A Simulação, por outro lado, irá deparar-se com as mesmas distribuições, porém o problema é solucionado “fisicamente”.

Neste artigo foi possível compreender quais são os passos e como elaborar um modelo de simulação, tendo a variabilidade e aleatoriedade nos dados. Foi perceptível a necessidade de um estudo para determinação do n e o número de réplicas, pois esses, quando mal dimensionados, podem gerar dados incorretos.

Referências

ABENSUR, E.O.; BRUSTEIN, I.; FISCHMANN, A.A.; HO, L.L. **Tendências Para o Auto Atendimento Bancário Brasileiro: Um Enfoque Estratégico Baseado na Teoria da Filas**. Revista de Administração Mackenzie. Ano 4, n.2, p. 39-59, 2003.

BARBOSA, R. A. **Modelagem e análise do sistema de filas de caixas de pagamento em uma drogaria: uma aplicação da teoria das filas**. In: XXIX Encontro Nacional De Engenharia De Produção: A Engenharia De Produção E O Desenvolvimento Sustentável Integrando Tecnologia E Gestão. Salvador, BA, Brasil, 06 a 09 de outubro de 2009.

CARSON, J. S. **Introduction to Modeling And Simulation**. Proceedings of the Winter Simulation Conference, U.S.A, 2004.

CHWIF, Leonardo. **Redução de modelos de simulação de eventos discretos na sua concepção: uma abordagem causal.** Tese de Doutorado. Escola Politécnica da USP. Departamento de Engenharia Mecânica, 1999.

CHWIF, Leonardo; MEDINA, Afonso C. **Modelagem e Simulação de Eventos Discretos: Teoria e Aplicações.** 3. Ed. rev. São Paulo: Ed. do Autor, 2010.

FERREIRA, J.O. **Simulação de Filas GI/G/m e Verificação de Aproximações Destas Por Filas Ph/Ph/m.** Dissertação de Mestrado em Computação Aplicada. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPI, 1999.

FIGUEIREDO, D.D., ROCHA, S.H.; **Aplicação da Teoria das Filas na Otimização do Número de Caixas: Um Estudo de Caso.** Revista de Iniciação Científica UNICESUMAR V.12, n.2, p.175-182, Maringá – PR, 2010.

LAW, A.M., **Simulation Modeling and Analysis.** 4 th ed. New York, McGraw-Hill, 2010.

MOORE H. J. & WEATHERFORD R. L. **Tomada de Decisão em administração com**

Planilhas Eletrônicas. 6. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

MORAES, F.G., SILVA, G.F., REZENDE, T.A. **Introdução a Teoria das Filas.** Universidade Federal do Mato Grosso, 2011.

MOREIRA, D. A. **Pesquisa Operacional – Curso Introdutório.** 2. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

OLIVEIRA, G. B. **Simulação Computacional: Análise de um Sistema de Manufatura em Fase de Desenvolvimento.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Engenharia de Itajubá: UNIFEI, 2007, 154p.

PERIN, C. F. **Introdução à simulação de sistemas.** Campinas, Ed. da Unicamp, 1995.

PINHEIRO, G. **Teoria de Filas e Sistemas de Comunicação,** Faculdade de Engenharia Eletrônica e Telecomunicações, UERJ, Rio de Janeiro, 2013.

PRADO, D. S., **Usando o ARENA em Simulação,** Belo Horizonte, Editora de Desenvolvimento Gerencial, 2009.